ENSI P 1992

EPREUVE DE MATHEMATIQUES SP

Durée : 4 heures

On conviendra, dans tout le problème, d'identifier un polynôme à une indéterminée, à coefficients réels, et la fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui lui est associée.

PARTIE I

On désigne par x un nombre réel quelconque et par L_x la fonction de la variable réelle t définie par :

$$L_x(t) = (t^2 - 2xt + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

On note (C_x) la courbe représentative de L_x dans un repère orthonormé du plan euclidien.

1.a - Déterminer, suivant les valeurs de x, l'ensemble de définition de L_x .

b - Préciser une transformation géométrique simple permettant de déduire (C_{-x}) de (C_x) et montrer que (C_x) possède un axe de symétrie.

2 - Soient x' et x'' deux réels distincts tels que $x' < x''$. Etudier l'existence de points communs à $(C_{x'})$ et à $(C_{x''})$ et la position relative de ces deux courbes.

3 - Etudier, suivant les valeurs de x, les variations de L_x et construire, sur un même graphique,

$\left(C_{\frac{1}{2}}\right)$, (C_1) et $\left(C_{\frac{3}{2}}\right)$.

PARTIE II

Soit y une fonction, supposée deux fois dérivable, de la variable réelle x, y' et y'' ses dérivées d'ordre 1 et 2 ; n étant un entier positif ou nul, on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) : (x^2 - 1)\,y'' + 2xy' - n(n+1)\,y = 0$$

Cette équation est appelée «équation de Legendre d'ordre n».

1 - Etude du cas n = 0. On considère donc :

$$(E_0) : (x^2 - 1)\,y'' + 2xy' = 0$$

Tournez la page S.V.P.

a - Déterminer, pour x appartenant à l'un quelconque des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, +\infty[$, la solution générale de (E_0).

b - Quel est l'ensemble Y_0 des solutions de (E_0) définies sur $\mathbb{R}$?

Déterminer celle de ces solutions, soit p_0, telle que $p_0(1) = 1$.

2 - Etude du cas n = 1. On considère donc :

$$(E_1) : (x^2 - 1)\,y'' + 2xy' - 2y = 0$$

a - Déterminer l'ensemble Y_1 des polynômes solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ et en particulier l'élément p_1 de Y_1 tel que $p_1(1) = 1$.

b - Soient f une fonction supposée définie sur $D =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$ et z une fonction définie sur $D^* = D - \{0\}$ par $z(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que si f est solution de (E_1) sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, +\infty[$, alors, pour tout x appartenant à D^*, z vérifie une équation différentielle du second ordre, soit (E'_1), que l'on écrira. Donner alors pour x appartenant à l'un quelconque des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, +\infty[$ la solution générale de (E_1).

3 - Etude du cas général. On considère à nouveau :

$$(E_n) : (x^2 - 1)\,y'' + 2xy' - n(n+1)\,y = 0,$$

et on suppose $n \geq 2$. On se propose, dans ce cas, de déterminer l'ensemble Y_n des polynômes solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$.

Soit P défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = a_q x^q + a_{q-1} x^{q-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

avec $a_q \neq 0$.

a - Montrer que, si P appartient à Y_n, alors on a $q = n$ et $a_{n-1} = 0$.

b - Trouver, pour tout h tel que $0 \leq h \leq n - 2$, une relation de récurrence entre a_h et a_{h+2}.

c - Expliciter, dans le cas où a_h est non nul, a_h en fonction de a_n.

d - Déterminer $p_2 \in Y_2$ et $p_3 \in Y_3$ tels que $p_2(1) = 1$ et $p_3(1) = 1$.

PARTIE III

Soit $n \in N$; si $n \geq 1$ on note $\frac{d^n[(x^2 - 1)^n]}{dx^n}$ la dérivée d'ordre n du polynôme $(x^2 - 1)^n$; si $n = 0$, on convient de poser $\frac{d^n[(x^2 - 1)^n]}{dx^n} = 1$.

1 - Montrer qu'il existe un entier λ_n que l'on déterminera, tel que l'on ait, pour tout n,

$$\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} = \lambda_n \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^p\,(2n-2p)!}{p!\,(n-p)!\,(n-2p)!}\,x^{\,n-2p}$$

où $E\left(\frac{n}{2}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Montrer que $\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}$ est, pour tout n, solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$.

2 - On appelle «suite des polynômes de Legendre» la suite (P_n), $n \in N$, dans laquelle P_n est défini, pour tout x réel, par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}.$$

(on a donc, en particulier, $P_0(x) = 1$ pour tout x).

a - Déterminer $P_i(x)$, $i \in \{1,2,3\}$.

b - Calculer, pour tout entier n au moins égal à 1, $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

PARTIE IV

On se propose, dans cette partie, de mettre en évidence certaines propriétés de la suite (P_n), $n \in N$, précédemment définie. Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels. On pose :

$$\forall (P,Q) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} : \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)\,.\,Q(x)\,dx\,.$$

1 - Soient P_r et P_s deux éléments distincts de la suite (P_n), $n \in N$, P_r' et P_s' les polynômes respectivement dérivés de P_r et P_s et U le polynôme $P_r' P_s - P_s' P_r$. Exprimer $\frac{d[(x^2-1)U]}{dx}$ en fonction de P_r et de P_s, puis calculer $\langle P_r, P_s\rangle$.

2.a - Montrer, à l'aide d'intégrations par parties successives, que l'on a :

$$\forall P \in \mathcal{E},\ \langle P, P_n\rangle = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\frac{d^n P}{dx^n}\,dx\,.$$

Donner la valeur de $\langle P, P_n\rangle$ dans le cas où le degré de P est strictement inférieur à n.

b - Exprimer $\langle P_n, P_n\rangle$ en fonction de $I_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx$, puis calculer I_n et $\langle P_n, P_n\rangle$.

Tournez la page S.V.P.

ENSI P - 1992 -

3 - On se propose d'établir une relation de récurrence entre les trois polynômes P_{n-1}, P_n, P_{n+1} ($n \in N^*$).

a - Montrer que, pour tout n fixé, on peut définir n + 2 réels α_0 , α_1 , ..., α_{n+1}, tels que l'on ait, pour tout x réel :

$$(\Re) : x\,P_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i \; P_{n+1-i}(x) \; .$$

b - Soit n au moins égal à 2 et $q \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Calculer :

$$\langle x\,P_{n-q}, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} x\,P_{n-q}(x)\,P_n(x)\,dx$$

et en déduire $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{n+1}$.

c - Montrer que les trois polynômes P_{n-1}, P_{n+1} , $x\,P_n$, n'ont que des termes de degré pair si n est impair et que des termes de degré impair si n est pair ; en déduire la valeur de α_1.

d - Montrer que $\alpha_0 + \alpha_2 = 1$; calculer α_0 et donner alors la relation de récurrence cherchée entre P_{n-1}, P_n, P_{n+1} ($n \in N^*$).